数理解析研究所講究録
186巻 1973年 33-46

Oblique境界値問題について

東工大 理　平良和昭

§0. 序

高階の楕円型微分作用素に対する，一般境界値問題の評価式，可解性，正則性は，境界上の作用素に対する考察に帰着されることを，[6]は示した(昨秋の学会の講演)。そして，Coercive な場合，即ち，Lopatinski-Shapiro条件(L-S条件)が成り立つ場合は，その境界上の作用素が右と左のパラメトリックスをもつことがわかるので，よく知られた評価式，可解性，正則性が，直ちに導かれる。従って，Coerciveな場合は，

① 境界への帰着

② パラメトリックスの構成

が可能であったわけである。

われわれは，ここで，Non-coerciveな場合でありながら，上の①と②(②が肝心!)が可能な例として，Laplacianに対する2つのOblique境界値問題(§1の(例1)と(例2))を考える。

同じ方向を目指したものとしては，[7]，[8]がある。

§2では，[6]の①は（例1）と（例2）の一部にしか有効でないので，（例2）を含むように拡張することについて簡単にふれる。§3，§4では，2つの例に対する②についてのべる。得られた結果は，§1にまとめられている。

§1. 結果

（記号）　$\Omega = \mathbb{R}^n$の有界な領域，$\Gamma = \Omega$のなめらかな境界.

$H^\sigma(\Omega)$ = Sobolev空間$H^\sigma(\mathbb{R}^n)$のΩへの制限； $\|\ \|_\sigma$ = ノルム.

$\mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ = 以下の例に応じて出てくる空間； $\|\ \|'_\sigma$ = ノルム.

ただし，$H^\sigma(\Omega) \subset \mathcal{H}^\sigma(\Omega) \subset H^{\sigma-1}(\Omega)$（位相もこめて）で，具体的にどのようなものであるかは，今の場合，重要ではない。

$$A = -\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right).$$

$\mathcal{H}_A^{\sigma,\tau} = \{ u \in \mathcal{H}^\sigma(\Omega) : Au \in H^\tau(\Omega) \}$； $\|\ \|'_{\sigma,\tau}$ = ノルム.

ただし，$\|u\|'_{\sigma,\tau} = \left(\|u\|'^{2}_\sigma + \|Au\|^2_\tau \right)^{1/2}$.

$H_A^{\sigma,\tau}$ = $\mathcal{H}^\sigma(\Omega) = H^\sigma(\Omega)$のとき（Coerciveな場合）の$\mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$（（結果2）の[0]をみよ）.

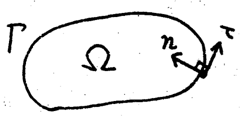
$H^\sigma(\Gamma)$ = Γ上のSobolev空間； $|\ |^\Gamma_\sigma$ = ノルム.

Γ_0 = Γの部分多様体（（例2）をみよ）.

$H^\sigma(\Gamma_0)$ = Γ_0上のSobolev空間； $|\ |^{\Gamma_0}_\sigma$ = ノルム.

(例1) $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ とする。次の問題を考えよう：

$$(\mathbb{B}.\mathbb{P}.)_1 \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \sqrt{-1}\,\dfrac{\partial u}{\partial \tau} + cu = \varphi & \text{on } \Gamma \end{cases}$$



ここで，n は内向き単位法線ベクトル，τ は単位接線ベクトル，c は Γ 上のなめらかな複素数値函数で，決して 0 にならないとする。

(注意1) $f=0$ のときは，既に[7]で複素変数の方法をもちいて考えられた(関連して[3])。$|\sqrt{-1}|=1$ であるから，Non-coercive となる。しかし，2次元であるということから，話は簡単になる(§3をみよ)。

(結果1) 以下，$\sigma\le\tau+2$, $\tau>-1/2$, $t\le\sigma-1$ とする([6])。

(1) 評価式： $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ のときの $(\mathbb{B}.\mathbb{P}.)_1$ の解 $u\in\mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$ に対して，次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|'_\sigma \le C\left(\|f\|_\tau + |\varphi|^\Gamma_{\sigma-3/2} + \|u\|_t\right);\quad C=\text{正の定数}$$

(2) 可解性： 次の写像は連続である。

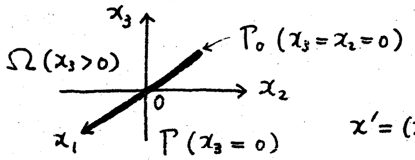
$$\left(A,\ \frac{\partial}{\partial n}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial\tau}+c\right): \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau} \longrightarrow H^\tau(\Omega)\oplus H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$$

Index は有限で，$\frac{1}{2\pi}[\arg c(x)]_{x\in\Gamma}$ に等しい。ただし，$[F(x)]_{x\in\Gamma}$ は，x が Γ を一周したときの $F(x)$ の増加を表わす。

(3) 正則性： $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ に対する解 u が $u\in H^t(\Omega)$ ならば，$u\in\mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ である。

（例2）　$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ とする。次の問題を考えよう：

$$(\mathrm{B.P.})_2 \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{on } \Gamma \end{cases}$$



$x' = (x_1, x_2)$

ここで，ベクトル場νは，Ωが$x_3 > 0$，Γが$x_3 = 0$，Γ_0が$x_3 = x_2 = 0$，となる局所座標(x_1, x_2, x_3)をとって原点の近傍に写したとき，$\nu = (c(x'), b(x'), a(x')x_2^k)$ という形をしているとする。ただし，k = 正の整数，a, b, c はΓ上のなめらかな実数値函数で，Γ上で$a \neq 0$，Γ_0上で$b \neq 0$である。

（注意2）　仮定から，νはΓ_0でΓにk次の接触をするので，Non-coerciveになる。$\mathbb{R}^n$ $(n>3)$の場合も全く同様に議論できるが，簡単のため$n=3$とした。

（結果2）　参考のため$k=0$ (Coercive)からはじめる。

[0] $k=0$：　$\sigma \le \tau + 2$，$\tau > -1/2$，$t < \sigma$ とする([6])。

(1) 評価式：　$f \in H^\tau(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ のときの$(\mathrm{B.P.})_2$の解$u \in H_A^{\sigma,\tau}$に対して，次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|_\sigma \le C\left(\|f\|_\tau + |\varphi|^{\Gamma}_{\sigma-3/2} + \|u\|_t\right);$$ C = 正の定数（以下同じ）

(2) 可解性：　次の写像は連続である。

$$\left(A, \frac{\partial}{\partial \nu}\right): H_A^{\sigma,\tau} \longrightarrow H^\tau(\Omega) \oplus H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$$

Indexは有限で，0に等しい。

(3) 正則性：　$f \in H^\tau(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ に対する解uが$u \in H^t(\Omega)$ならば，$u \in H^\sigma(\Omega)$である。

[I] $k=\text{even}$: $3/2<\sigma\leq\tau+2$, $\tau>-1/2$, $t\leq\sigma-1$ とする(以下同じ)。

(1) 評価式: $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ のときの $(\mathrm{B.P.})_2$ の解 $u\in\mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$ に対して、次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|'_\sigma\leq C\left(\|f\|_\tau+|\varphi|^\Gamma_{\sigma-3/2}+\|u\|_t\right).$$

(2) 可解性: 次の写像は連続である.

$$\left(A,\frac{\partial}{\partial\nu}\right):\ \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}\longrightarrow H^\tau(\Omega)\oplus H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$$

Index は有限で、0 に等しい。

(3) 正則性: $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ に対する解 u が $u\in H^t(\Omega)$ ならば、$u\in\mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ である。

[II] $k=\text{odd}$, $a(0)b(0)<0$: Index 有限にするため $(\mathrm{B.P.})_2$ を次のようにする(§4をみよ)。

$$(\mathrm{B.P.})'_2\begin{cases}Au=f & \text{in }\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\varphi & \text{on }\Gamma\\ \gamma_{\Gamma_0}u=u_0 & \text{on }\Gamma_0\qquad(\gamma_{\Gamma_0}=\Gamma_0\text{ へのトレース})\end{cases}$$

(1) 評価式: $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$, $u_0\in H^{\sigma-3/2+\frac{1/2}{1+k}}(\Gamma_0)$ のときの $(\mathrm{B.P.})'_2$ の解 $u\in\mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$ に対して、次の評価式が成り立つ.

$$\|u\|'_\sigma\leq C\left(\|f\|_\tau+|\varphi|^\Gamma_{\sigma-3/2}+|u_0|^{\Gamma_0}_{\sigma-3/2+\frac{1/2}{1+k}}+\|u\|_t\right).$$

(2) 可解性: 次の写像は連続である。

$$\left(A,\frac{\partial}{\partial\nu},\gamma_{\Gamma_0}\right):\ \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}\longrightarrow H^\tau(\Omega)\oplus H^{\sigma-3/2}(\Gamma)\oplus H^{\sigma-3/2+\frac{1/2}{1+k}}(\Gamma_0).$$

Index は有限である。

(3) 正則性: $f\in H^\tau(\Omega)$, $\varphi\in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$, $u_0\in H^{\sigma-3/2+\frac{1/2}{1+k}}(\Gamma_0)$ に対す

る解 u が $u \in H^t(\Omega)$ ならば，$u \in \mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ である。

[Ⅲ]　$K=\text{odd}$，$a(0)\,b(0)>0$：

(1)　評価式：　$f \in H^\tau(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ のときの $(\mathrm{B.P.})_2$ の解 $u \in \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$ に対して，次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|'_\sigma \leq C\left(\|f\|_\tau + |\varphi|^\Gamma_{\sigma-3/2} + \|u\|_t\right).$$

(2)　可解性：　次の写像は連続である。

$$\left(A, \tfrac{\partial}{\partial\nu}\right): \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau} \longrightarrow H^\tau(\Omega) \oplus H^{\sigma-3/2}(\Gamma).$$

零空間の次元は σ, τ によらず（次の (3) から），有限である。

(3)　正則性：　$f \in H^\tau(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ に対する解 u が $u \in H^t(\Omega)$ ならば，$u \in \mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ である。

[Ⅲ]′　$K=\text{odd}$，$a(0)\,b(0)>0$：　Index 有限にするには，$(\mathrm{B.P.})_2$ を次のようにすればよい（§4をみよ）。

$$(\mathrm{B.P.})_2''\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} + G(w(x_1)\otimes\delta(x_2)) = \varphi & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

ここで，ポテンシャル G は，$\mathcal{A}^*$（= §4 に与えられている $\mathcal{A}$ の adjoint）に対する Dirichlet 問題の Poisson 作用素である。（$\mathcal{A}^*$ については，上の[Ⅱ]の場合になるので，G は存在する。）

(1)　評価式：　$f \in H^\tau(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ のときの $(\mathrm{B.P.})_2''$ の解 $u \in \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau}$，$w \in H^{\sigma-3/2-\frac{1/2}{1+K}}(\Gamma_0)$ に対して，次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|'_\sigma + |w|^{\Gamma_0}_{\sigma-3/2-\frac{1/2}{1+K}} \leq C\left(\|f\|_\tau + |\varphi|^\Gamma_{\sigma-3/2} + \|u\|_t + |w|^{\Gamma_0}_s\right)$$

ただし，$s < \sigma - 3/2 - \frac{1/2}{1+k}$ である。

(2) 可解性： 次の写像は連続である。

$$\begin{pmatrix} A, & 0 \\ \frac{\partial}{\partial\nu}, & G(\cdot\otimes\delta) \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{H}_A^{\sigma,\tau} \\ \oplus \\ H^{\sigma-3/2-\frac{1/2}{1+k}}(\Gamma_0) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{\tau}(\Omega) \\ \oplus \\ H^{\sigma-3/2}(\Gamma) \end{matrix}$$

Index は有限である。

(3) 正則性： $f \in H^{\tau}(\Omega)$，$\varphi \in H^{\sigma-3/2}(\Gamma)$ に対する解 u，w が $u \in H^{t}(\Omega)$，$w \in H^{s}(\Gamma_0)$ ならば，$u \in \mathcal{H}^{\sigma}(\Omega)$，$w \in H^{\sigma-3/2-\frac{1/2}{1+k}}(\Gamma_0)$ である。

（注意３） §4 でのべるように，$H^{\sigma}(\Omega) \subset \mathcal{H}^{\sigma}(\Omega) \subset H^{\sigma-\frac{k}{1+k}}(\Omega)$（位相もこめて）であるから，[0] $k=0$ の場合と比べて，評価式，正則性とも "$\frac{k}{1+k}$" の損失になっている。従って，上の [I], [II], [III] は，[2] の結果の（有限次の接触の場合の）精密化になっていることに注意しよう。（[1] の結果は，[I] と [III] の場合に限って有効である。） また，$\sigma > 3/2$ なる制限は，$\mathcal{H}^{\sigma}(\Omega)$ を導入する際，技術上生ずる。

§2. 境界への帰着

この § では，A = 2階の楕円型微分作用素，B = 境界条件とする。このとき，[6] を（例 1）と（例 2）に使えるようにするには，次のようなことに注意すればよい。

(1)　A に対する Dirichlet 問題の Poisson 作用素 $\mathcal{P}$ をもちいて，$\tilde{\mathcal{P}} = B\mathcal{P}$ なる Γ 上の擬微分作用素（Ψ.D.O.）を導入すれば，[6] の結果から，$\tilde{\mathcal{P}}$ に対する考察に帰着される。

(2)　Coercive な場合は，$\tilde{\mathcal{P}}$ は 1 階の楕円型であって，

$$\tilde{\mathcal{P}} : H^1(\Gamma) \longrightarrow H^0(\Gamma)$$

で連続であるが，Non-coercive な場合でも，$\tilde{\mathcal{P}}$ のシンボルの性質によっては，

$$\tilde{\mathcal{P}} : \mathcal{H}^1(\Gamma) \longrightarrow H^0(\Gamma)$$

で連続になるような，$H^1(\Gamma) \subset \mathcal{H}^1(\Gamma) \subset H^0(\Gamma)$（位相もこめて）なる函数空間 $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ をみつけられる場合がある。（例 1）と（例 2）がまさしくそういう場合である（§3，§4 をみよ）。そこで，$\tilde{\mathcal{P}}$ に対してかかる $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ が存在するという仮定のもとに議論する。

(3)　$\tilde{\mathcal{P}}$ に対してパラメトリックスを構成する際，（例 2）の $k = \text{odd}$ の場合は $\tilde{\mathcal{P}}$ だけを考えていたのでは不可能で，γ_{Γ_0}（[II] の場合）や G（[III]′ の場合）をつけ加えねばならない（§4 をみよ）。ところが，$\tilde{\mathcal{P}}$ をつぎのような形 $\hat{\mathcal{P}}$ にしても，

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}} , & G(\cdot \otimes \delta) \\ C\gamma_{\Gamma_0} , & 0 \end{pmatrix} \qquad (C = \Gamma_0 \text{ 上の Ψ.D.O.})$$

もとの境界値問題をそれに応じて変えれば，$\hat{\mathcal{P}}$ は変えた問題に対する "Reduction" になる。

§3. パラメトリックスの構成 (1)

(例1)について考える。§2 (1)の$\mathcal{P}$は，今の場合，局所的に次のようなシンボルの展開をもつ。

$$\begin{cases} -2\xi + c(x) + \cdots & \xi > 0 \\ \qquad\quad c(x) + \cdots & \xi < 0 \end{cases}$$

ここで，$x \in \Gamma$，$\xi \in \mathbb{R}^1$である。Γ上で$c(x) \neq 0$だったから$\mathcal{P}$は，$\xi > 0$で1階，$\xi < 0$で0階の，楕円型である。そこで，次のような函数空間$H^{1,0}(\mathbb{R}^1)$を導入しよう。

$$H^{1,0}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{B}_{2,k} \quad \text{([5]の定義2.2.1をみよ)}.$$

ただし，Temperate weight function $k(\xi)$は，次式で与えられる。

$$k(\xi) = \begin{cases} (1+\xi^2)^{1/2} & \xi > 0 \\ 1 & \xi \leq 0 \end{cases}.$$

$H^{1,0}(\Gamma)$は，この$H^{1,0}(\mathbb{R}^1)$を使って定義される。このとき，$H^1(\Gamma) \subset H^{1,0}(\Gamma) \subset H^0(\Gamma)$（位相もこめて）である。この$H^{1,0}(\Gamma)$が，§2 (2)の$\mathcal{H}^1(\Gamma)$になる。即ち，次は連続である。

$$\mathcal{P} : H^{1,0}(\Gamma) \longrightarrow H^0(\Gamma)$$

さらに，$\mathcal{P}$が，$\xi > 0$で-1階，$\xi < 0$で0階の，パラメトリックス$\tilde{R}$をもつことも，明らかであろう。

$$H^{1,0}(\Gamma) \underset{\tilde{R}}{\overset{\mathcal{P}}{\rightleftarrows}} H^0(\Gamma).$$

また，Index も，有名なF. Nötherの公式を少し修正すれば，

$$\frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{Arg}\ c(x)\right]_{x\in\Gamma}$$

に等しいこともわかる（[7]）。

あとは，$H^1(\Gamma)\subset\mathcal{H}^1(\Gamma)=H^{1,0}(\Gamma)\subset H^0(\Gamma)$ なる $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ のもつ性質が忠実に反映するように，$H^\sigma(\Omega)\subset\mathcal{H}^\sigma(\Omega)\subset H^{\sigma-1}(\Omega)$ なる $\mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ を定義してやればよい。

§4.　パラメトリックスの構成（2）

（例2）について考える。§2(1)の $\mathcal{T}$ を計算する前に，変数変換して，ベクトル場 ν を扱いやすいようにしよう。仮定から

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = a(x')x_2^K\frac{\partial}{\partial x_3} + b(x')\frac{\partial}{\partial x_2} + c(x')\frac{\partial}{\partial x_1}$$

であった。さて，(x_1,x_2) を次式によって (y,t) に変換すると

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}x_1(y,t) = c\,(x_1(y,t),x_2(y,t)) & ;\quad x_1(y,0)=y\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}x_2(y,t) = b\,(x_1(y,t),x_2(y,t)) & ;\quad x_2(y,0)=0\end{cases}$$

ベクトル場 ν は

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = A(y,t)\,B^K(y,t)\,t^K\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial t}$$

となる。ただし，$A(y,t)=a(x_1,x_2)$，$B(y,0)=b(x_1,0)$ である。

さらに，$\mathcal{T}$ は，局所的に，次のような形である。

$$\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t} - A(y,t)\,B(y,t)^K\,t^K\sqrt{-\Delta'}$$

ただし，$\sqrt{-\Delta'}$ は，Γ 上の Laplacian $-\Delta'$ の $\frac{1}{2}$ 乗の，Ψ.D.O.である。

そこで，次のような函数空間 $H_{(1,K)}(\mathbb{R}^2)$ を導入しよう。

$$u \in H_{(1,k)}(\mathbb{R}^2) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} u \in H^0(\mathbb{R}^2),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in H^0(\mathbb{R}^2),\ t^k \frac{\partial u}{\partial y} \in H^0(\mathbb{R}^2).$$

ノルム $\|u\|_{(1,k)} = \left(\|u\|_0^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_0^2 + \left\|t^k \frac{\partial u}{\partial y}\right\|_0^2\right)^{1/2}$.

$H_{(1,k)}(\Gamma)$ は，この $H_{(1,k)}(\mathbb{R}^2)$ を使って定義される。このとき，$H^1(\Gamma) \subset H_{(1,k)}(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{1+k}}(\Gamma) \subset H^0(\Gamma)$ (位相もこめて) である。この $H_{(1,k)}(\Gamma)$ が，§2(2) の $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ になる。即ち，次は連続である。

$$\tilde{\Upsilon} : H_{(1,k)}(\Gamma) \longrightarrow H^0(\Gamma)$$

ところで，$\tilde{\Upsilon}$ に対するパラメトリックスの構成は，次の ($\xi \in \mathbb{R}^1$ をパラメーターとする) 変数係数の常微分作用素 L に対して "逆" を構成することに帰着される ([4])。

$$L(t, \xi, \tfrac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} - a(0)\, b(0)^k |\xi|\, t^k$$

ここで，$a(0) \neq 0$, $b(0) \neq 0$ であったことを思い出そう。さて，Coercive な場合のときの "L-S 条件" に相当することを調べてみよう。そのために，$Lv = 0$ なる v と，$L^* w = 0$ ($L^* = L$ の adjoint) なる w を計算すると，それぞれ

$$\begin{cases} v(t, \xi) = C_1\, e^{\alpha(0)|\xi| \frac{t^{k+1}}{k+1}} & (C_1 = \text{定数}) \\ w(t, \xi) = C_2\, e^{-\alpha(0)|\xi| \frac{t^{k+1}}{k+1}} & (C_2 = \text{定数}) \end{cases}$$

である。ただし，$\alpha(0) = a(0)\, b(0)^k$ である。

このとき，正の整数 k と $\alpha(0) \neq 0$ の符号によって次のように分類される。

[I] $k = \text{even}$, $\alpha(0) \neq 0$: v, w が，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ($= \mathbb{R}^1$ 上の急減少函数の全体) に入るのは，$v \equiv 0$, $w \equiv 0$ に限られるから，

Lに対して右と左の"逆"をつくることができる(具体的に構成できる。以下，[II], [III], [III]′についても同じである)。

[II] $k=\mathrm{odd}$, $\alpha(0)<0$: $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$で，$w$が$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$に入るのは$w\equiv 0$に限られるから，右の"逆"はつくれるが左の"逆"はつくれない。ところが，Dirichlet 条件 $v(0,\xi)=0$ をつければ，$v\equiv 0$に限られるから，左の"逆"もつくれる。

[III] $k=\mathrm{odd}$, $\alpha(0)>0$: vが$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$に入るのは$v\equiv 0$に限られるが，$w\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$だから，左の"逆"はつくれるが右の"逆"はつくれない。

[III]′ $k=\mathrm{odd}$, $\alpha(0)>0$: ところが，任意のfに対して，

$$g = f - \frac{(f,w)}{(w,w)}\,w$$

と射影してやれば，$(g,w)=0$である。そこで，Lの代わりに，次のような作用素L'を考えれば，

$$L' = L + \frac{(\cdot\,,w)}{(w,w)}\,w$$

このL'に対しては，右と左の"逆"をつくることができる。L'の第2項に相当するのが，§1(結果2)にのべられているポテンシャル G である。

以上のようなことから，次のように，[I], [II], [III]′は右と左のパラメトリックス，[III]は左のパラメトリックスをつくることができる。($k=\mathrm{odd}$の場合は，$\alpha(0)=a(0)\,b(0)^k$ と $a(0)\,b(0)$ の符号が同じであることに注意しよう。)

[I] $K=\text{even}$, $a(0)b(0)\neq 0$:

$$H_{(1,K)}(\Gamma) \underset{\widetilde{R}}{\overset{\widetilde{\mathcal{T}}}{\rightleftarrows}} H^0(\Gamma)$$

[II] $K=\text{odd}$, $a(0)b(0)<0$:

$$H_{(1,K)}(\Gamma) \underset{\widetilde{R}}{\overset{\widehat{\mathcal{T}}=(\widetilde{\mathcal{T}},\gamma_{\Gamma_0})}{\rightleftarrows}} H^0(\Gamma)\oplus H^{\frac{1/2}{1+K}}(\Gamma_0)$$

[III] $K=\text{odd}$, $a(0)b(0)>0$:

$$H_{(1,K)}(\Gamma) \underset{\widetilde{R}}{\overset{\widetilde{\mathcal{T}}}{\rightleftarrows}} H^0(\Gamma)$$

[III]′ $K=\text{odd}$, $a(0)b(0)>0$:

$$\begin{matrix} H_{(1,K)}(\Gamma) \\ \oplus \\ H^{-\frac{1/2}{1+K}}(\Gamma_0)\end{matrix} \underset{\widetilde{R}}{\overset{\widehat{\mathcal{T}}=(\widetilde{\mathcal{T}},\,G(\cdot\otimes\delta))}{\rightleftarrows}} H^0(\Gamma)$$

[II], [III]′ の場合は，§2(3) でのべたように，命に応じてもとの境界値問題を，§1 の $(\mathrm{B.P.})_2'$，$(\mathrm{B.P.})_2''$ のように変更しなければならない。あとは，§3 と同様に，$H^1(\Gamma)\subset\mathcal{H}^1(\Gamma)=H_{(1,K)}(\Gamma)\subset H^{\frac{1}{1+K}}(\Gamma)\subset H^0(\Gamma)$ なる $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ のもつ性質が忠実に反映するように，$H^\sigma(\Omega)\subset\mathcal{H}^\sigma(\Omega)\subset H^{\sigma-\frac{K}{1+K}}(\Omega)\subset H^{\sigma-1}(\Omega)$ なる $\mathcal{H}^\sigma(\Omega)$ を定義してやればよい。

REFERENCES

[1] Egorov, On subelliptic pseudodifferential operators, Soviet Math. Dokl., 10 (1969), 1056-1059.

[2] Egorov and Kondoratev, The oblique derivative problem, Math. USSR Sb., 7 (1969), 139-169.

[3] Fujiwara and Uchiyama, On some dissipative boundary value problems for the Laplacian, J. Math. Soc. Japan, 27 (1971), 625-635.

[4] Grušin, On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sb., 13 (1971), 155-185.

[5] Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, Berlin, 1963.

[6] Taira, On non-homogeous boundary value problems for elliptic differential operators, to appear.

[7] Vaǐnberg and Grušin, Uniformly noncoercive problems for elliptic equations, I, II, Math. USSR Sb., 1 (1967), 543-568, 2 (1967), 111-134.

[8] Višik and Grušin, Elliptic boundary value problems degenerating on a submanifold of the boundary, Soviet Math. Dokl., 11 (1970), 60-64.